AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

E.D.O. lineales de segundo orden. La Transformada de Laplace.

(*)1.- Las soluciones de la ecuación característica asociada a una E.D.O. lineal de coeficientes constantes son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0$. Encuentra la ecuación diferencial y la solución general de la misma. Haz lo mismo en el caso $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

2.- Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:
1) $y'' - y = 0$ 2) $y'' - 8y' + 15y = 0$ 3) $y'' - 3y' - 10y = 0.$ 4) $y'' - 6y' + 25y = 0$
5) $2y'' + 2y' + 3y = 0$ 6)$y'' + 2y' + y = 0$ 7) $y'' + 4y = 0$

3.- Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas:
1) $y''+3y'-10y = 6e^{4x}$ 2) $y''-4y'+4y = 2e^{2t}+\frac{t}{2}$ 3) $y''-3y'+2y = 14\operatorname{sen}(2x)-18\cos(2x)$
4) $y''+4y = 3\operatorname{sen} x$ 5) $y''-2y'+2y = e^{x}\operatorname{sen} x$ 6) $2y''-4y'-8y = -50\cos(3x)-40\operatorname{sen}(3x)$.

4.- Resuelve el "problema de contorno":

$$x'' + x' - 6x = 0,\ x(0) = 1 \text{ y } x(\infty) = 0$$

5.- Resuelve los siguientes problemas de valor inicial y de contorno:
1) $y'' - 5y' + 6y = 0,\quad y(1) = e^2,\ y'(1) = 3e^2$ 2) $y'' - 6y' + 9y = 0,\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 11$
3) $2y'' - y' + 2y = e^{4x},\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 2$ 4) $y'' - y' - 5y = 1,\quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{-1}{5}$
5) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{-2t}(9\operatorname{sen}(2t) + 4\cos(2t)),\quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$

(*)6.- Supongamos que la las raíces de la ecuación $\lambda^2+a\lambda+b = 0$ tienen parte real negativa. Prueba que toda solución de la E.D.O. $x'' + ax' + bx = 0$ satisface $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

(*)7.- Sean a, b y c tres constantes positivas. Prueba que la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación $ax'' + bx' + cx = g(t)$, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, converge a cero cuando $t \to \infty$.

8.- Sea la E.D.O. $x'' + a_1x' + a_2x = q(t)$, con $a_2 \neq 0$, y donde q es un polinomio de grado 2. Prueba que una solución particular de la ecuación es otro polinomio de grado menor o igual a 2.

9.- Sea la E.D.O. $x'' + a_1x' + a_2x = b(t)$.
a) Si $b(t) = e^{\alpha t}$, prueba que la ecuación admite una solución particular del tipo
(i) $Ae^{\alpha t}$ si α no es raíz del polinomio característico.
(ii) $Ate^{\alpha t}$ si α es una raíz simple del polinomio característico.
(iii) $At^2e^{\alpha t}$ si α es raíz doble del polinomio característico.
b) Si $b(t) = \cos(\alpha t)$, prueba que la ecuación admite una solución particular del tipo
(i) $A\cos(\alpha t) + B\operatorname{sen}(\alpha t)$ si $\pm\alpha i$ no son las raices del polinomio característico.
(ii) $t(A\cos(\alpha t) + B\operatorname{sen}(\alpha t))$ si $\pm\alpha i$ son las raíces del polinomio característico.

10.- VAMOS A CONSTRUIR UN AMORTIGUADOR (Oscilador amortiguado). Un disco, fijo a una masa m, está sumergido en un fluido que ejerce una fuerza amortiguadora $-b\frac{dx}{dt}$. La fuerza elástica restauradora de un muelle es $-Kx$. Halla la ecuación que rige el funcionamiento del amortiguador (ver figura A). Resuelve la ecuación.

(*)11.- En un circuito eléctrico RLC (ver figura B) se producen caídas de voltaje en los elementos del circuito que experimentalmente se evaluan como:
en la resistencia $V_R = -RI$
en el selenoide $V_L = -L\frac{dI}{dt}$
en el condensador $V_C = \frac{-1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)ds$
(donde R,L,y C son constantes que dependen de los elementos colocados en el sistema y donde I es la intensidad que depende del tiempo). Si $E(t)$ es el voltaje que proporciona una pila, establece (usando las leyes de Kirchoff) la ecuación diferencial que rige el sistema. Deriva la expresión resultante y compárala con la del ejercicio anterior.

12.- a)**(*)** Sea $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$.Supongamos que $Lf(s_0) := \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ existe para algún $s_0 > 0$ y además $\lim_{t\to\infty} e^{-s_0 t}f(t) = 0$. Prueba que para todo $s > s_0$ existe

$$Lf(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

A la función Lf se le llama *Transformada de Laplace* de la función f. Comprueba que el dominio de Lf es al menos $[s_0, \infty)$.
b) Comprueba la siguiente tabla de transformadas:
1) $f(x) = 1$ tiene $Lf(s) = \frac{1}{s}$ 2) $f(x) = x$ tiene $Lf(s) = \frac{1}{s^2}$
3) $f(x) = e^{-\alpha x}$ tiene $Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ 4) $f(x) = \operatorname{sen}\beta x$ tiene $Lf(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
5) $f(x) = \cos\beta x$ tiene $Lf(s) = \frac{s}{s^2+\beta^2}$. 6) Calcula $Lf(s)$, donde $f(x) = e^{3x}\operatorname{sen} x$.

13.- Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:
a) Para f y g funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$.
b)Si f es dos veces derivable, entonces $Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$ y $Lf''(s) = s^2Lf(s) - sf(0) - f'(0)$.

14.- Calcula la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$f(t) = \begin{cases} x\operatorname{sen} x, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}, \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

15.- Se consideran las funciones:
1) $Lf(s) = \frac{1}{s+3}$ 2) $Lf(s) = \frac{4}{s^2+3s+1}$ 3) $Lf(s) = \frac{s}{s^2-4s+3}$
4) $Lf(s) = \frac{s-7}{25+(s-7)^2}$ 5) $Lf(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$.
en cada caso halla f, la transformada inversa de Laplace.

(*)16.- Sean $H(s) = \frac{1}{s+3}$, $H(s) = \frac{4}{s^2+3s+1}$ y $H(s) = \frac{s}{s^2-4s+3}$ tres funciones de transferencia de otros tantos sistemas lineales causales (circuitos eléctricos). Encuentra las ecuaciones diferenciales que rigen estos circuitos.

17.- Resuelve los siguientes problemas de valor inicial usando la Transformada de Laplace:
a) $y'' - 6y' + 5y = 0,\ y(0) = 3, y'(0) = 11$ b) $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$

c) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{-2x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} + 3 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$